Задания на VII областной мини-турнир юных математиков 2019

5-7 классы *06-07.04. 2019*

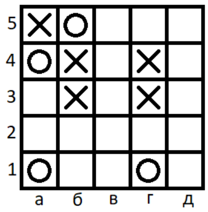
- В предварительных материалах должны быть представлены ваши исследования (решения) **не менее 5 заданий.**

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят *исследовательский характер*, поэтому наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**:
  - в распечатанном (шрифт –Times New Roman, размер 14 пт) или аккуратно записанном от руки виде;
  - при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения(й) образования, город, автор(ы) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты Вы решили, какие сделали обобщения,
  - при этом четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - на последней странице приведите список литературы и Интернет-источников, которые Вы использовали при проведении исследования (*строго обязательно*!)

Задание 1. Необычные игры в крестики-нолики

1. Саша и Коля играют в крестики-нолики в поле 5×5 по следующим правилам: Саша на своем ходу ставит в любую клетку крестик, а Коля на своем в любую клетку нолик. Начинает игру Саша. Если на каком-то ходу какие-то четыре крестика Саши образуют вершины прямоугольника, то он побеждает, а если все поле заполнено и Саша не победил, то выигрывает Коля. Например, на рисунке крестики в клетках б3, б4, г3, г4 образуют прямоугольник 2×3. Кто победит при правильной игре обоих?



2. На каком минимальном по площади поле Саша может гарантировать себе победу при правильной игре Коли (поле может быть прямоугольным)?

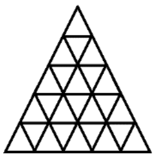
3. Ответьте на два предыдущих вопроса, если для победы Саше надо, чтобы крестики располагались в вершинах квадрата.

4. Исследуйте данную задачу (вопросы 1-3), если Коля на своем ходу может поставить а) два нолика в соседние клетки б) n ноликов в соседние клетки в одном ряду (т.е. нолики Коли займут прямоугольник $1\times n$)

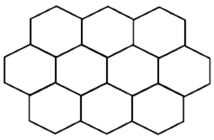
5. Исследуйте данную задачу (вопросы 1-3), если Коля на своем ходу может поставить а) два нолика в любое место б) 3 нолика в любое место. В данном пункте интересует не только минимальный размер поля, но и в целом существуют ли примеры полей, на которых Саша может гарантировать себе победу.

6. Теперь Саша на своем ходу ставит два крестика, а Коля три нолика. Причем для победы Саше надо получить крестики в вершинах прямоугольника, а Коле в вершинах квадрата. Если все поле заполнено и никто не победил – объявляется ничья. На каких полях победит Саша, на каких Коля, а на каких будет ничья?

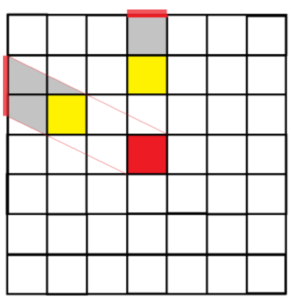
7. Исследуйте задачу пунктов 1, 2, 4, 5 на «треугольном» поле, где каждая ячейка имеет вид равностороннего треугольника (рисунок) и Саше для победы надо расположить крестики в вершинах равностороннего треугольника.



8. Попробуйте исследовать подобную задачу на поле в виде «пчелиных сот» (рисунок поле 3×3), если Саше надо получить крестики в вершинах а) параллелограмма б) правильного шестиугольника.



Задание 2. Сад царя Гороха



У царя Гороха квадратный сад размером $n \times n$, разбитый на клетки размером 1×1. Он посадил карликовую яблоню с золотыми яблоками в золотую кадку 1 □ 1, расположенную в центральной клетке (в случае четного n центральной клеткой считается одна из четырех клеток квадрата 2×2 в центре сада). Сад огорожен. Чтобы зеваки не могли любоваться золотой кадкой, рядом поставлены обыкновенные кадки, размером 1×1, которые закрывают обзор по всему периметру. Кадки не могут касаться изгороди, иметь общие углы и стороны (см. рисунок).

1. Какое минимальное количество обыкновенных кадок размера 1×1 для этого потребуется? Какой при этом минимальный размер сада?

Ответьте на те же вопросы, что и в пункте 1 для случаев:

2. размер золотой кадки 1×1, размеры обыкновенных кадок 1×2.
3. размеры центральной золотой кадки и обыкновенных кадок равны 1×2.
4. размер золотой кадки 1×1, размеры обыкновенных кадок $1 \times n$, $n \in \boldsymbol{N}$. (начните исследовать задачу хотя бы с небольших значений n).
5. размеры центральной золотой кадки и обыкновенных кадок равны $1 \times n$. (исследуйте задачу при различных $n \in \boldsymbol{N}$).
6. размер золотой кадки $1 \times m$, размеры обыкновенных кадок $1 \times n$ (начните исследовать задачу хотя бы с небольших значений m и $n \in \boldsymbol{N}$).

Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задание 3. Путешествие двух математиков по гимназии №P

1. а) В одном из классов гимназии № P пять горизонтальных рядов по три места в каждом (всего 15 мест). Места в каждом ряду считаются слева направо: в первом ряде места 1, 2 и 3; во втором – 4, 5, 6 и т. д. Два математика Егор и Миша, придя на первый урок в этот класс, решили сесть так, чтобы номер места Егора был равен номеру ряда Миши, а сумма номеров мест равна 12. Помогите занять свои места Егору и Мише;

   б) На втором уроке, перейдя в соседний класс, они увидели в там 3 горизонтальных ряда по пять мест в каждом (всего 15 мест) и решили рассесться как и до этого (как в пункте а). Помогите занять свои места Егору и Мише;

   в) исследуйте пункты а) и б) если сумма номеров равна 9;

   г) попробуйте рассадить в пункте а) ещё Борю, Леонида, Олю и Нину, если известно, что разность номеров сидений Бори и Лёни равна 8, а сумма номеров Оли и Нины равна 7.

2. а) Третий урок проходил в классе, где было 5 горизонтальных рядов по 5 мест в каждом (всего 25 мест). Три друга Егор, Миша и Тарас решили рассесться так, чтобы номер места Егора был равен номеру горизонтального ряда Миши и равен номеру вертикального ряда Тараса. Сумма же их номеров мест равнялась 14. Помогите приятелям занять свои места, если это возможно;

   б) Четвёртый урок прошёл в этом же классе (в классе 5 горизонтальных рядов по 5 мест в каждом). Егор и Миша захотели, чтобы номер горизонтального ряда Егора был равен номеру вертикального ряда Миши, а сумма номеров мест равнялась 8. Найдите номера мест Егора и Миши. Какие значения может принимать сумма номеров мест.

3. а) Пятый урок проходил в том же кабинете, что и первый (пункт 1 а). Егор и Миша решили сесть так, чтобы номер места Егора был равен номеру ряда Миши, а произведение номеров мест равнялась 12. Помогите занять свои места Егору и Мише;

   б) Шестой урок прошел в классе, где было 10 горизонтальных рядов по восемь мест в каждом. Егор и Миша решили сесть так, чтобы номер места Егора был равен номеру ряда Миши, а произведение номеров мест равнялась 15. Помогите занять свои места Егору и Мише;

   в) Друзья решили исследовать вопрос: «Какие значения могут быть получены для произведения их мест на шестом уроке?». Помогите им справиться с этим вопросом.

4. а) На седьмом уроке всех учеников школы собрали в актовом зале размера $n \times m$. Изучите задачу, аналогичную пунктам 1 и 3 для актового зала.

   б) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задание 4. Перекраска куба

1. а) Куб $3 \times 3 \times 3$ сложен из 27 синих кубиков. Имеются также синяя и белые краски. За ход разрешается выбрать любой кубик и перекрасить его, а также все кубики, имеющие с выбранным общую грань, по правилу: синий – в белый, белый – в синий. Сделайте несколько ходов так, чтобы получился куб белый снаружи. За какое наименьше количество ходов Вы сможете получить такой куб?

   б) Рассмотрим всевозможные варианты окраски 26 видимых кубиков в синий и белые цвета (каждый кубик красится целиком в один из цветов). Каждый ли из этих вариантов можно получить из синего куба за несколько ходов?

2. Рассмотрите те же задачи для куба $4 \times 4 \times 4$ и других размеров, а также для прямоугольных параллелепипедов различных размеров (начните исследования с параллелепипедов небольших размеров, например, $3 \times 3 \times 4$).

3. Рассмотрите те же задачи, когда имеется три краски – синяя, белая и зеленая, причем синий маленький кубик перекрашивается в белый, белый перекрашивается в зеленый, зеленый — в синий.

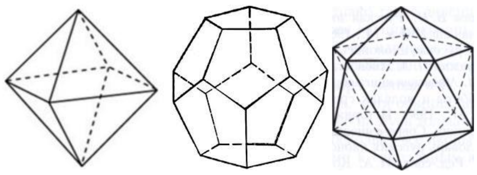
Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задание 5. Игра с коробкой

1. У двух игроков есть кубическая картонная коробка, в которой лежит приз. Они по очереди выбирают одно из ребер коробки и разрезают коробку вдоль этого ребра. Выигрывает тот, после чьего хода можно открыть коробку и достать приз. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или второй игрок? Коробка открывается, если она разрезана вдоль трёх ребер одной грани.

2. Решите задачу, если коробка имеет форму правильной n-угольной призмы (в этом случае коробка открывается, если она разрезана вдоль всех ребер одной грани за исключением одного ребра).

3. а) Решите задачу, если коробка имеет форму тетраэдра, октаэдра, икосаэдра. Понятно, что теперь коробка открывается, если она разрезана вдоль двух ребер одной грани. **б)** Решите задачу, если коробка имеет форму додекаэдра. В этом случае коробка открывается, если она разрезана вдоль четырех ребер одной из его двенадцати граней.



Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

4. а) В центральной клетке квадрата 7×7, сложенного из спичек и разбитого на клетки 1×1 (так что границы каждой клетки – спички) лежит приз. Двоё по очереди убирают по одной спичке. Приз забирает тот, после хода которого к призу можно будет пройти из внешней по отношению к квадрату области. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или второй игрок? **б)** Рассмотрите эту же задачу для случая квадрата $n \times n$ (прямоугольника $m \times$ n). Начните свои исследования с небольших значений m и n.

5. Предложите свои направления и обобщения данной задачи и изучите их.

Задание 6. Письма

Сотрудникам почты необходимо разослать N писем. Время от времени начальник опускает очередное письмо в конверт и кладет его на уже лежащую стопку с конвертами. Его помощник время от времени берет самый верхний конверт из стопки и отдает его почтальону для отправки. Будем считать, что письма, которые кладет начальник, пронумерованы им по порядку, начиная с 1.

1) Может ли помощник отправить письма в таком порядке: 2-4-1-3?

2) Пусть нужно разослать 4 письма. Сколько всего может получиться различных порядков отправления писем?

3) Пусть нужно разослать 5 писем. Сколько всего может получиться различных порядков отправления писем?

4) Пусть нужно разослать 10 писем. Сколько всего может получиться различных порядков отправления писем?

5) Докажите, что количество всевозможных порядков отправления n писем равно количеству способов разрезать правильный (n+2)-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники.

6) Предложите свои направления и обобщения данной задачи и изучите их.

Задание 7. Остров с телепатами

На одном затерянном острове в Тихом океане живут аборигены. Среди аборигенов есть рыцари, которые говорят всегда правду, а есть лжецы, которые всегда лгут. Также некоторые из аборигенов обладают телепатическими способностями и умеют влиять на других жителей. Среди аборигенов телепатов есть телепаты-лжецы и телепаты-рыцари. Если рядом с рыцарем находится телепат лжец, то рыцарь говорит неправду. Если рядом с лжецом телепат-рыцарь, то лжец уже говорит правду. При этом аборигены, которых влияют телепаты свой статус не меняют: лжец остается лжецом, несмотря на то, что он под влиянием телепата говорит правду, а рыцарь – рыцарем. Телепаты не могут повлиять друг на друга. А также если рядом с аборигеном находится и телепат-лжец, и телепат-рыцарь, то их влияние компенсируется и абориген не меняет правдивость своих заявлений.

1. Как-то раз 10 аборигенов выстроились в ряд и каждый из них заявил «я телепат!». Какое количество телепатов могло быть среди них?
2. Теперь 10 аборигенов выстроились по кругу.Какое наибольшее и какое наименьшее количество аборигенов могло заявить:
   a. «Я лжец»?
   b. «Мой левый сосед лжец»?
   c. «Хотя бы один из моих соседей - лжец»?
   d. «Оба моих соседа лжецы»?
   e. «Среди аборигенов в кругу больше лжецов»?
3. Какое количество телепатов в случаях пункта 2 может быть, если заявлений было максимальное и минимальное количество.
4. Решите три предыдущих пункта в общем случае: если аборигенов было не 10, а n.
5. По кругу стоит n рыцарей и m лжецов. Какое наименьшее и наибольшее количество телепатов могло быть, если каждый из них сказал:
   a. «я рыцарь»?
   b. «мой левый сосед рыцарь»?
   c. «Хотя бы один из моих соседей – рыцарь»?
   d. «Оба моих соседа – рыцари»?
   e. «Среди аборигенов в кругу больше рыцарей»?
6. Как-то на острове проходили выборы вождя. У аборигенов было 4 кандидата: рыцарь, лжец, телепат-рыцарь и телепат-лжец. После выборов кандидаты выстроились в ряд и каждый из них заявил: «Вождем стал или я, или мой сосед». После чего каждый из них сделали заявления о своих соседях. Первый сказал: «Мой сосед – лжец», второй ответил «А мои оба соседа - рыцари», третий заявил: «Мои оба соседа - лжецы», и четвертый добавил: «и ты, мой сосед – лжец». Как могли стоять кандидаты, и кто из них стал вождем.
7. Решите аналогичную задачу если было $4k$ кандидатов: k рыцарей, k лжецов, k телепатов-рыцарей и k телепатов-лжецов. Потом каждый из них заявил: «Вождем стал или я, или мой сосед», а также оба крайних сказали, что их соседи лжецы, а среди не крайних аборигенов те, что стояли на четных местах сказали, что их оба соседа рыцари, а на нечетных, что оба лжецы. При каких k такое возможно. Для всех возможных k опишите все возможные расположения аборигенов и кто из них мог стать вождем.
8. В каждой клетке доски 4×4 абориген. Соседями считаются аборигены, которые стоят в клетках с общей стороной. Если у лжеца среди соседей больше телепатов-рыцарей, чем лжецов, то он говорит правду. Аналогично, рыцарь лжет, если среди его соседей больше телепатов-лжецов, чем рыцарей. Какое наибольшее и какое наименьшее число из них может произнести фразу:

a. «Я лжец»?
b. «Хотя бы один из моих соседей – лжец»?
c. «Все мои соседи лжецы»?
d. «Среди аборигенов в квадрате больше лжецов»?

9. Решите задачу пункта 8, если соседями считать аборигенов в клетках, у которых есть хотя бы одна общая точка (т.е. соседи и по вертикали, и по горизонтали, и по диагонали: максимум 8 соседей).
10. Решите задачи пунктов 8-9 для квадрата $n \times n$.

<u>Задание 8. Уроки геометрии</u>

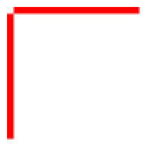
Анна занялась изучением геометрии. И для начала она хочет практиковаться в рисовании квадратов со стороной длины 1. Анна очень аккуратная, поэтому рисует квадраты только в плоскости со сторонами параллельными осям координат и с вершинами в целых точках (точках с целочисленными координатами).

Если Анна рисует квадрат, то каждый отрезок она долго чертит под линейку. Её старший брат находит такой подход нерациональным, поэтому предложил ей следующий способ рисовать быстрее и без линейки некоторые из отрезков:

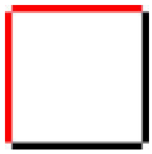
1. для рисования отрезка, концы которого имеют координаты (x, y) и (x, y+1), нужно посмотреть, есть ли уже нарисованный отрезок с координатами концов (x', y) и (x', y+1) для некоторого x'. Если такой отрезок находится, то его можно использовать в качестве ориентира, чтобы быстро нарисовать новый.

2. для рисования отрезка с координатами концов (x, y) и (x+1, y), аналогично, нужно посмотреть, есть ли уже нарисованный с координатами концов (x, y') и (x+1, y') для некоторого y'. Если такой отрезок находится, то его можно использовать в качестве ориентира, чтобы быстро нарисовать новый.

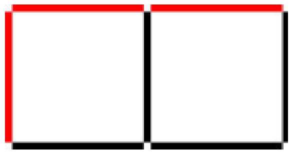
Например, если Анна хочет нарисовать один квадрат, ей придется нарисовать два отрезка с помощью линейки:



После этого можно нарисовать оставшиеся два отрезка, используя первые в качестве ориентира:



Если же Анне надо нарисовать два квадрата, ей придется нарисовать три отрезка с помощью линейки (два горизонтальных и один вертикальный), а после дорисовать оставшиеся четыре отрезка, используя первые в качестве ориентира. Например:



1. Докажите, что для рисования трёх квадратов достаточно 4 отрезков под линейку: приведите пример и докажите, что меньшего количества не хватит.

2. Сколько отрезков необходимо нарисовать под линейку для 4 квадратов.

3. Оцените или приведите точное количество отрезков для случая произвольного n.

4. Исследуйте три предыдущих вопроса для рисования других фигур на целочисленной решетке.

5. А если решётка образована правильными шестиугольниками и рисуются шестиугольники?

6. Попробуйте обобщить исходную постановку на случай трёхмерного пространства (рисуем кубы).

7. Предложите свои обобщения.

Задание 9. Красим квадрат

1. Дан клетчатый квадрат 10×10. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить так, чтобы любой прямоугольник 2×5 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал бы хоть одну закрашенную клетку?
2. А в квадрате 11×11?
3. Попробуйте решить эту задачу для квадратов 12×12, 13×13 и 14×14.
4. А если взять квадрат n×n (для n>14)?
5. Дан клетчатый квадрат $2n$×$2n$. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить так, чтобы любой прямоугольник 2×n со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал бы хоть одну закрашенную клетку?
6. Дан клетчатый квадрат 15×15. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить так, чтобы любой прямоугольник 3×5 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал бы хоть одну закрашенную клетку?
7. А в квадрате $(15+x)\times(15+x)$, где x – натуральное число от 1 до 14 включительно?
8. Какое наименьшее количество клеток в квадрате 30×30 можно закрасить, чтобы выполнялись условия пунктов 1 и 6 (в прямоугольниках указанных размеров должна быть хотя бы одна закрашенная клетка)?
9. Попробуйте решить пункт 8 для квадрата n×n.
10. Предложите свои направления и обобщения данной задачи.

Задание 10 . Замерзает озеро

1. На озере растут кувшинки, причем все озеро покрыто кувшинками. С наступлением холодов кувшинки (вместе с той частью озера, где они росли) стали замерзать. В первый день замерзла одна кувшинка, во второй – две, в третий – четыре. Все озеро замерзло за 51 день. За какое время замерзнет четвертая часть озера?

2. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрывается вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй – не более 20, в третий - не более 30 м и т.д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 19%. Через какое время пруд полностью замерзнет?

3. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрывается вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во торой – не более 20, в третий - не более 30 м и т.д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 25%. Через какое время пруд полностью замерзнет?

4. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрывается вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во торой – не более 20, в третий - не более 30 м и т.д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 35%. Через какое время пруд полностью замерзнет?

5. Предложите свои направления и обобщения этой задачи и изучите их.

Задание 11. Исходы игры

Максим и Никита решили сыграть в игру. У них есть 2 кучи: в первой 4, в другой 5 камней. Максиму изначально дано положительное целое число a из интервала [1,2], а Никите дано число b из того же интервала. (Каждому известно число другого.)

Затем начинается игра. На каждом своем ходу Максим может выбрать любую кучку, содержащую как минимум a камней, и удалить из нее ровно a камней. Точно так же на каждом своем ходу Никита может выбрать любую кучку с не менее b камнями и удалить из нее ровно b камней. Если игрок не может сделать ход, он проигрывает.

Если оба игрока играют оптимально (то есть, если существует стратегия выигрыша, то игрок ей следует), результат в конечном счете зависит от выбора a и b, а также от того, кто начинает. Рассмотрим пару (a,b). Всего есть четыре вида игр:

1. Максим побеждает вне зависимости от того, кто начинает.
2. Никита побеждает вне зависимости от того, кто начинает.
3. Если Максим начинает, он побеждает. Если Никита начинает, он побеждает. То есть первый игрок побеждает.
4. Если Максим начинает, Никита побеждает. Если Никита начинает, Максим побеждает. То есть второй игрок побеждает.

Пункт 1.

а. Если игру начинает Максим и $a = b = 1$? А если $a = 1$, $b = 2$? Зависит ли исход игры от того, кто её начинает (ходит первым), при $a = 2$, $b = 1$?

б. Докажите, что существует ровно по одной игре каждого вида для целых a и b из интервала [1, 2].

в. А если камней в кучках 5 и 11?

г. А если камней в кучках поровну?

д. Рассмотрите случай для количества камней v_1 и v_2 в первой и второй кучке соответственно, где v_1 и v_2 – произвольные натуральные числа?

Пункт 2.

а. Найдите количество игр каждого из четырёх видов для двух кучек с 4 и 5 камнями, но при условии, что Максим и Никита могут выбирать целые числа a и b в интервале [1, 20].

б. А если камней в кучках 5 и 11?

в. А если камней в кучках поровну?

г. Попробуйте найти точные значения или оценить количество игр каждого вида (или какого-либо из видов) для предыдущих пунктов, когда a и b выбираются из интервала [1, m], где m – произвольное натуральное число?

Пункт 3.

А если количества камней в кучках v_1 и v_2, а целые числа a и b выбираются из интервала [1, m], где v_1, v_2, m – произвольные натуральные числа. Интересны точные значения даже для каких-либо частных случаев, не разобранных ранее.

Пункт 4.

Исследуйте частные случаи при большем количестве кучек, попробуйте оценить количества игр каждого вида или найти точные значения.

Пункт 5.

Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.